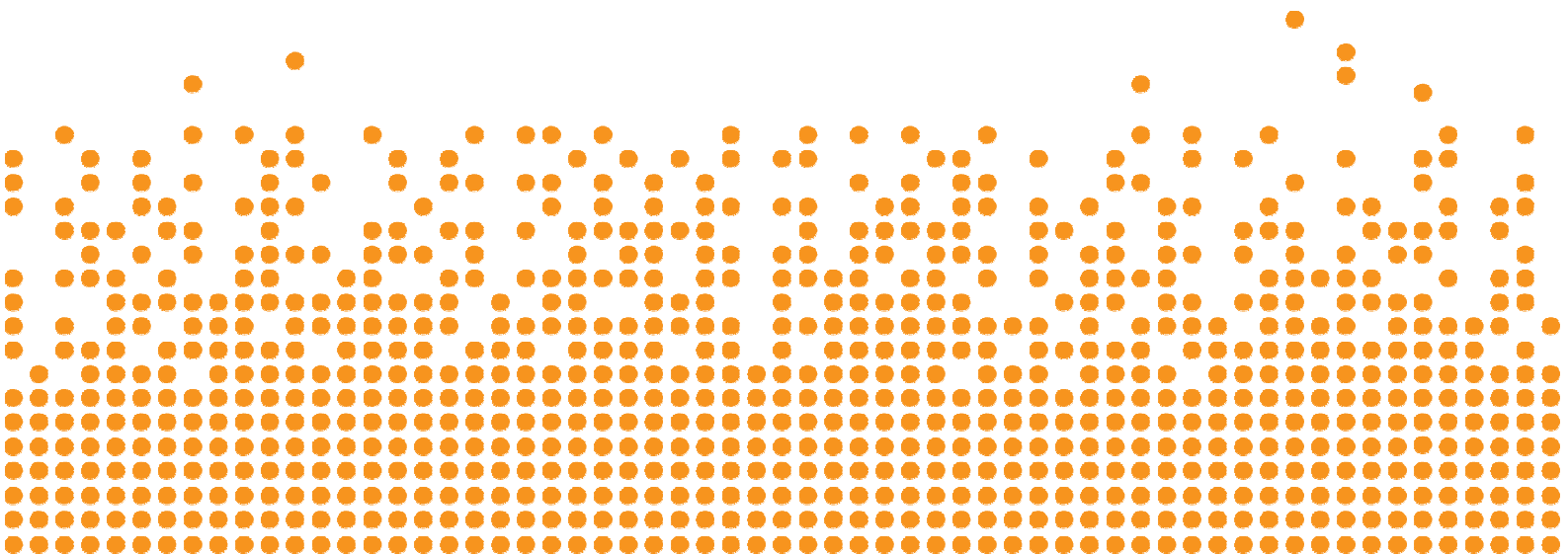
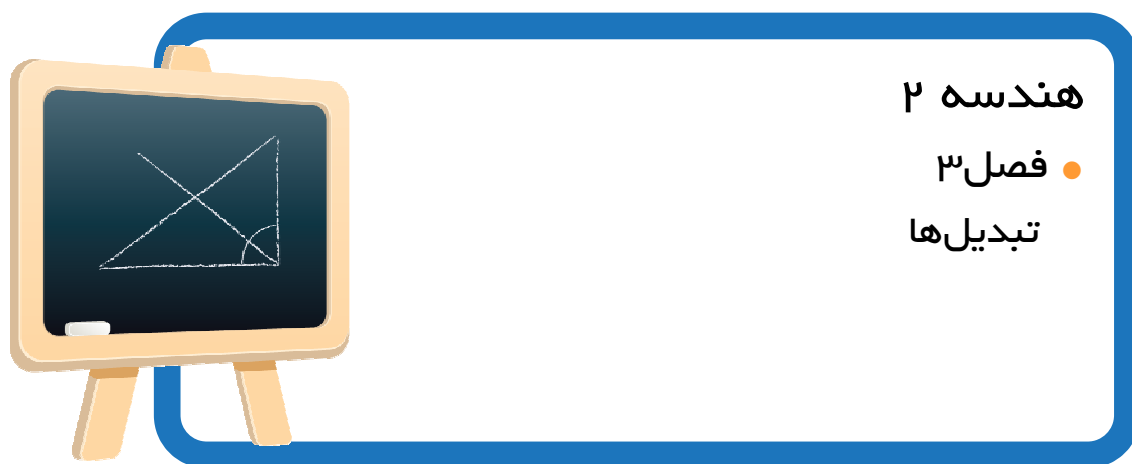




هندسه ۲

فصل ۳: تبدیل‌ها

۱- ضابطه $M(x, y) = (0, y)$ مفروض است، این ضابطه:

(۱) نگاشت نیست.

(۲) نگاشت است ولی تبدیل نیست.

(۳) تبدیل است و ایزومتري است.

(۴) تبدیل است ولی ایزومتري نیست.

۲- نقاط $A(-1, 1)$ ، $B(4, -1)$ ، $C(7, 1)$ و $D(2, 2)$ رؤس یک متوازی‌الاضلاع هستند. تصویر مرکز این متوازی‌الاضلاع در انتقال با برداری که A را روی B تصویر می‌کند، کدام است؟

- (۱) $(8, -1)$ (۲) $(7, 2)$ (۳) $(7, -2)$ (۴) $(8, -2)$

۳- بازتاب نسبت به خط الزاماً:

(۱) ایزومتري است و شیب خط را حفظ می‌کند.

(۲) ایزومتري است و جهت شکل را حفظ می‌کند.

(۳) ایزومتري است و جهت شکل و الزاماً شیب خط را حفظ نمی‌کند.

(۴) ایزومتري نیست ولی شیب خط و جهت شکل را حفظ می‌کند.

۴- مجموع مختصات نقطه‌ی M برابر عدد k است. این نقطه را ابتدا نسبت به محور y ، سپس نقطه‌ی حاصل را نسبت به محور x ها و در انتها نیز نقطه حاصل را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده‌ایم. مجموع مختصات نقطه‌ی حاصل برابر است با:

- (۱) k (۲) $-k$ (۳) $2k$ (۴) صفر

۵- در بازتاب نسبت به خط D تصویر نقطه‌ی $A(3, 4)$ نقطه‌ی $A'(1, 2)$ است. کدام نقطه‌ی زیر روی خط D است؟

- (۱) $(-2, 3)$ (۲) $(3, -2)$ (۳) $(4, 1)$ (۴) $(-1, 4)$

۶- اگر خط $D: 3x - 2y = 4$ تصویر خط $L: 3x - 2y = 6$ در یک انتقال باشد، ضابطه این انتقال کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) $T(x, y) = (x, y + 1)$ (۲) $T(x, y) = (x + 2, y + 4)$ (۳) $T(x, y) = (x - 2, y - 2)$ (۴) $T(x, y) = (x + 1, y + 2)$

۷- تحت یک بازتاب نسبت به خط، نقطه‌ی $M(-5, 2)$ به نقطه‌ی $N(7, -2)$ تبدیل شده است. معادله‌ی محور بازتاب کدام است؟

- (۱) $y = 2x$ (۲) $y = x - 1$ (۳) $y = 3x - 3$ (۴) $y = x + 1$

۸- دو خط موازی D و D' با چند انتقال متفاوت می‌توانند بر یکدیگر تصویر شوند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

۹- دو پاره‌خط مساوی AB و $A'B'$ در چند حالت از حالات زیر همواره بازتاب محوری هم هستند؟

(الف) موازی باشند. (ب) در یک امتداد باشند. (ج) ساق‌های یک دوزنقه باشند.

(د) اضلاع روبه‌روی یک مستطیل باشند. (ه) از یک نقطه رسم شده باشند. (و) بر هم عمود باشند.

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۰- تحت یک بازتاب نسبت به خط، مثلث ABC با رؤس $A(-3, 8)$ ، $B(-5, 2)$ و $C(-1, 4)$ به مثلث $A'B'C'$ با رؤس $A'(9, 4)$ ، $B'(7, -2)$ و $C'(5, 2)$ تبدیل شده است، معادله‌ی محور بازتاب کدام خط است؟

- (۱) $y = 3x - 3$ (۲) $y = x - 1$ (۳) $y = 2x$ (۴) $y = x + 1$

۱۱- چند عدد از نگاشت‌های زیر یک تبدیل ایزومتري است؟

- $T_1(x, y) = (-x + 1, -y + 2)$ $T_2(x, y) = (2x, y)$

- $T_3(x, y) = (x, -y)$ $T_4(x, y) = (x^2, y)$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲- معادله یک خط گذرنده از مبدأ پس از انتقال به صورت $2x - y = 4$ در آمده است. کدام یک از گزینه‌های زیر، بردار انتقال نمی‌تواند باشد؟

- (۱) $(1, -2)$ (۲) $(2, 0)$ (۳) $(3, 2)$ (۴) $(-1, -2)$

۱۳- فاصله‌ی تبدیل‌یافته‌های دو نقطه‌ی $A(1, 1)$ و $B(2, 2)$ در تبدیل $T(x, y) = (2x + 1, 2y - 1)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۱

۱۴- به‌ازای کدام مقدار α ، خطوط $x - y + 1 = 0$ و $x + y - 1 = 0$ و $\alpha x + 2y - \alpha = 0$ محوره‌ای تقارن یک شکل می‌توانند باشند؟

- (۱) ۱ (۲) -۱۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۵- تبدیل‌یافته‌ی خط d به معادله $y = x - 3$ بر اثر ابتدا تبدیل $T_1(x, y) = (x + y, \frac{1}{y})$ و سپس تبدیل $T_2(x, y) = (x - 2y, 2y)$ کدام است؟

- (۱) خود خط d (۲) $x + y = 3$ (۳) $x + y = 1$ (۴) $y = x - 1$

۱۶- قرینه $d: x - y + 2 = 0$ نسبت به خط ℓ ، خط $d': x + y - 2 = 0$ گردیده است. معادله‌ی خط ℓ کدام است؟

- (۱) $y = x$ (۲) $y = -x$ (۳) $x = 2$ (۴) $y = 2$

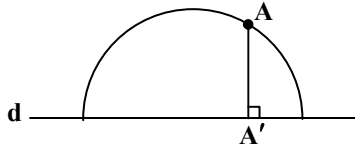
Δ ۱۷- مثلث ABC تحت تبدیل $T(x, y) = (2, y - 2)$ به چه شکلی تبدیل می‌شود؟

- (۱) یک مثلث (۲) یک نیم‌خط (۳) یک پاره‌خط (۴) یک خط

۱۸- دو نقطه $(3, -2)$ و (m, n) نسبت به خط $y = 2$ قرینه‌ی یکدیگر هستند. در این صورت $m - n$ کدام است؟

- (۱) -۹ (۲) -۳ (۳) ۹ (۴) ۳

۱۹- در شکل مقابل، نگاشت M هر نقطه از نیم‌دایره را به نقطه‌ای از خط d تصویر می‌کند. کدام توصیف برای نگاشت M صحیح است؟



(۱) نگاشت M، تبدیل نمی‌باشد.

(۲) نگاشت M، یک تبدیل غیر ایزومتري است.

(۳) نگاشت M، یک تبدیل ایزومتري است.

(۴) وابسته به شرایط، هر سه حالت امکان‌پذیر است.

۲۰- دوران با چه زاویه‌ای می‌تواند شیب خط را حفظ کند؟

- (۱) هیچ زاویه‌ای (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $\frac{3k\pi}{2}$ (۴) $k\pi$

۲۱- دوران یافته‌ی خط $x - \sqrt{3}y = 0$ حول مبدأ مختصات با زاویه 60° کدام است؟

- (۱) $y = x$ (۲) $y = -x$ (۳) $x = \sqrt{3}y$ (۴) $x = 0$

۲۲- کدام تبدیل ایزومتري است ولی الزاماً شیب خط را حفظ نمی‌کند؟

- (۱) تجانس (۲) بازتاب نسبت به نقطه (۳) انتقال (۴) بازتاب نسبت به خط

۲۳- تحت دوران به مرکز مبدأ مختصات خط $D: 2x - 3y = 4$ به $D': 3x + 2y + 4 = 0$ تبدیل می‌شود. تصویر نقطه‌ی $(-1, -2)$ از خط D چه نقطه‌ای از خط D' است؟

- (۱) $(0, -2)$ (۲) $(-2, 1)$ (۳) $(-4, 4)$ (۴) $(2, -1)$

۲۴- چهارضلعی ABCD با رئوس $A(6, 1)$ و $B(8, 3)$ و $C(6, 5)$ و $D(4, 3)$ مفروض می‌باشد. تصویر این چهارضلعی را تحت تبدیل یافته $T(x, y) = (\sqrt{2}x, \sqrt{2}y)$ و سپس مجانس شکل تصویر را در تجانس با نسبت $k = 3$ می‌یابیم. شکل حاصل دارای چه مساحتی است؟

- (۱) ۱۴۴ (۲) $24\sqrt{2}$ (۳) $72\sqrt{2}$ (۴) $48\sqrt{2}$

۲۵- نقاط $A(2, 0)$ و $B(6, 2)$ و $C(5, 4)$ و $D(1, 2)$ رئوس یک متوازی‌الاضلاع هستند. تصویر این شکل را ابتدا با ضابطه‌ی $T_1(x, y) = (x, -y)$ و سپس با ضابطه‌ی $T_2(x, y) = (2x, 2y)$ به دست می‌آوریم. مساحت شکل حاصل برابر است با:

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۴۰ (۴) ۶۰

۲۶- نقطه‌ی $M(-3, 1)$ حول نقطه‌ی $A(1, 1)$ به اندازه‌ی 90° در جهت مثلثاتی دوران می‌کند. مختصات نقطه‌ی تصویر کدام است؟

- (۱) $(-3, \sqrt{2})$ (۲) $(-3, -3)$ (۳) $(1, 4)$ (۴) $(1, -3)$

۲۷- دو خط موازی در یک صفحه دارای چند مرکز تجانس می‌باشد؟

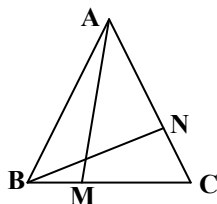
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۲۸- ترکیب دو تقارن محوری که محورهای آن دو خط موازی و به فاصله‌ی ۲ واحد است، کدام گزینه می‌باشد؟

- (۱) انتقال با طول بردار ۴ (۲) انتقال با طول بردار ۲ (۳) تجانس با نسبت ۲ (۴) تجانس با نسبت $\frac{1}{2}$

۲۹- تصویر خط $y = 4x - a$ بر اثر دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی 90° از نقطه‌ی $(0, 2)$ می‌گذرد. a کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۸ (۴) ۸

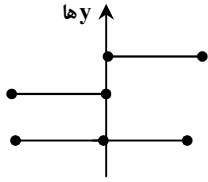
۳۰- در مثلث متساوی‌الاضلاع مقابل، می‌دانیم $BM = CN$ می‌باشد. اگر نقطه‌ی G، مرکز ثقل مثلث ABC باشد، برای انطباق مثلث ABM به

مثلث BCN چه نوع تبدیلی لازم است؟

(۱) دوران به مرکز B و زاویه‌ی 60° (۲) دوران به مرکز B و زاویه‌ی 120° (۳) دوران به مرکز G و زاویه‌ی 120° (۴) دوران به مرکز G و زاویه‌ی 60°

پاسخ‌های تشریحی فصل ۳

۱- گزینه ۲ پاسخ است.



ضابطه‌ی $M(x,y) = (0,y)$ تمام نقاط (x,y) از صفحه را روی محور y ها تصویر می‌کند. مطابق شکل هر نقطه روی یک نقطه تصویر می‌شود اما یک نقطه می‌تواند تصویر چند نقطه باشد، پس یک به یک نیست و تبدیل نمی‌باشد.

۲- گزینه ۱ پاسخ است.

مرکز متوازی‌الاضلاع $ABCD$ وسط AC است:

$$O = \frac{A+C}{2} = (3,1)$$

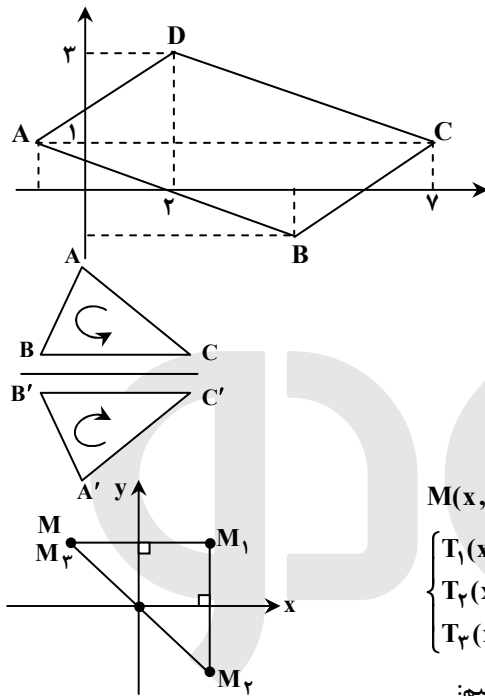
اگر $\overline{AB}$ بردار انتقال باشد: $\overline{AB} = B - A = (5, -2)$

$$T(x,y) = (x+5, y-2) \Rightarrow T(3,1) = (3+5, 1-2) = (8, -1)$$

۳- گزینه ۳ پاسخ است.

بازتاب نسبت به خط ایزومتري است. شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند (مگر در حالتی که خط با محور بازتاب موازی یا بر آن عمود باشد) و جهت شکل را نیز حفظ نمی‌کند.

۴- گزینه ۱ پاسخ است.

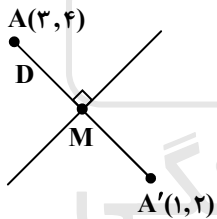


$$M(x,y), x+y=k$$

$$\begin{cases} T_1(x,y) = (-x,y) \Rightarrow M_1(-x,y) \\ T_2(x,y) = (x,-y) \Rightarrow M_2(-x,-y) \\ T_3(x,y) = (-x,-y) \Rightarrow M_3(x,y) \Rightarrow x+y=k \end{cases}$$

با شکل نیز می‌توان متوجه شد که بعد از این سه تقارن، دوباره به نقطه‌ی M می‌رسیم:

۵- گزینه ۳ پاسخ است.



$$\text{شیب } AA' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-4}{1-3} = 1$$

پس شیب خط D باید -1 باشد، چون بر AA' عمود است.

$$M = \frac{A+A'}{2} = (2,3)$$

$$D: y-3 = -(x-2) \Rightarrow y = -x+5$$

فقط گزینه‌ی ۳ نقطه‌ای روی این خط است.

۶- گزینه ۴ پاسخ است.

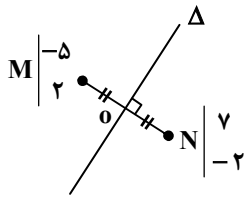
$$\begin{cases} L: 3x-2y=6 \\ D: 3x-2y=4 \end{cases}, T(x,y) = (x+h, y+k) \Rightarrow \begin{cases} X=x+h \\ Y=y+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=X-h \\ y=Y-k \end{cases}$$

$$\text{در } L \Rightarrow 3(X-h) - 2(Y-k) = 6 \Rightarrow 3X - 2Y = 6 + 3h - 2k$$

$$\text{در } D \Rightarrow 6 + 3h - 2k = 4 \Rightarrow \boxed{3h - 2k = -2}$$

هر h و k از ضوابط انتقال که در این رابطه صدق کنند جواب‌اند. پس گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ می‌توانند ضوابط انتقال باشند و لذا جواب گزینه‌ی ۴ است.

۷- گزینه ۳ پاسخ است.



$$O = \frac{M+N}{2} = (1, 0)$$

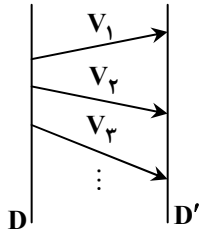
$$\text{شیب } MN = \frac{2 - (-2)}{-5 - 7} = \frac{-1}{3}$$

پس شیب محور تقارن باید عکس و قرینه این شیب باشد:

$$m_{\Delta} = 3$$

$$\Delta: y - 0 = 3(x - 1) \Rightarrow \Delta: y = 3x - 3$$

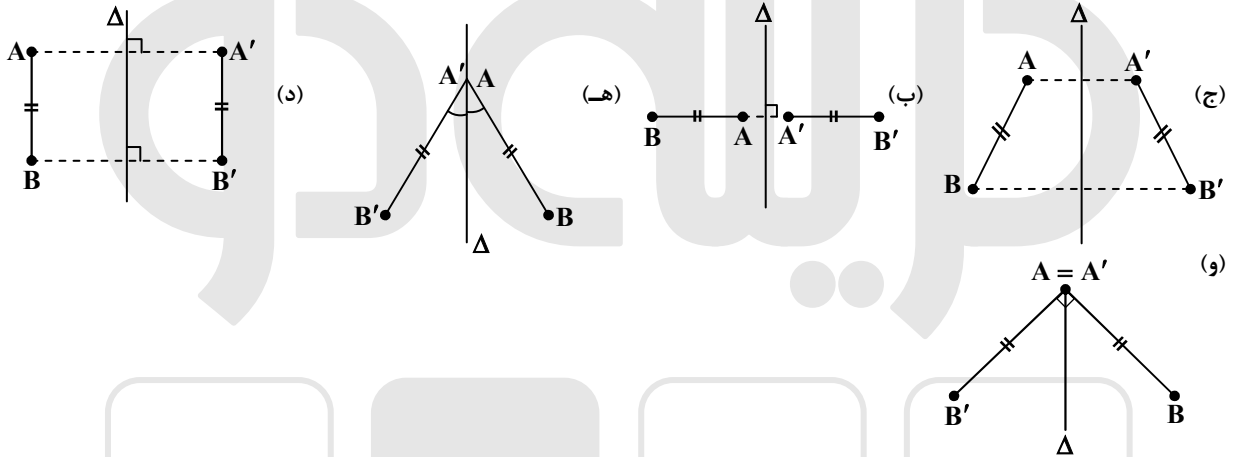
۸- گزینه ۴ پاسخ است.



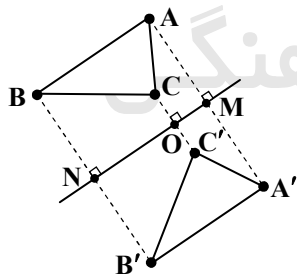
هر دو خط موازی D و D' تصویر یکدیگرند در بی‌شمار انتقال با بردارهای

مختلفی که یک سر آن‌ها روی D و سر دیگر روی D' است.

۹- گزینه ۴ پاسخ است.



۱۰- گزینه ۱ پاسخ است.



کافی است نقاط M و N را که به ترتیب وسط‌های CC' و BB' هستند بیابیم و سپس معادله‌ی خط MN را بنویسیم:

$$\begin{cases} M = \frac{C+C'}{2} = \frac{(-1, 4) + (5, 2)}{2} = (2, 3) \\ N = \frac{B+B'}{2} = \frac{(-5, 2) + (7, -2)}{2} = (1, 0) \end{cases} \Rightarrow \text{شیب } MN = \frac{3-0}{2-1} = 3$$

$$MN: y - 0 = 3(x - 1) \rightarrow y = 3x - 3$$

راه حل دیگر: می‌شود خط عمودمنصف AA' را بنویسیم:

$$O = \frac{A+A'}{2} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6.5 \end{pmatrix}$$

$$m_{AA'} = \frac{8-4}{-3-9} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \text{شیب محور تقارن} = 3 \Rightarrow y - 6 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 3$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم تبدیل ایزومتري، تبدیلی است که طول تمام پاره‌خط‌ها را حفظ می‌کند و در نتیجه اعمال یک تبدیل ایزومتري بر روی شکل به شکلی همنهشت با آن شکل اولیه خواهیم رسید. به راحتی می‌توان تحقیق نمود که تبدیل T_۲ به خاطر داشتن ضریب ۲ ایزومتري نمی‌باشد. همچنین نگاشت T_۴ به خاطر داشتن توان ۲ اصولاً تبدیل نمی‌باشد و طبیعتاً ایزومتري نیز نیست. دو تبدیل دیگر، ایزومتري هستند.

۱۲- گزینه ۴ پاسخ است.

در حالت کلی، انتقال یافته هر نقطه از خط اولیه نسبت به بردار انتقال در معادله خط انتقال یافته باید صدق نماید. در این سوال نیز، انتقال یافته مبدأ به عنوان یکی از نقاط خط ورودی نسبت به بردار انتقال (α, β) ، نقطه (α, β) خواهد شد. با امتحان کردن گزینه‌ها داریم:

$$O(0,0) \xrightarrow{T(-1,-2)} O'(-1,-2) \xrightarrow{2x-y=4} -2+2 \neq 4$$

لذا بردار $(-1, -2)$ نمی‌تواند بردار انتقال باشد. صحت بقیه گزینه‌ها به راحتی تحقیق می‌شود.

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$T(x, y) = (2x + 1, 2y - 1)$$

$$A(1, 1) \xrightarrow{T} A'(3, 1)$$

$$B(2, 2) \xrightarrow{T} B'(5, 2)$$

$$A'B' = \sqrt{(5-3)^2 + (2-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

تبدیل تجانس ایزومتري نیست، فاصله نقاط در نسبت تجانس ضرب می‌شوند.

۱۴- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر شکلی بیش از یک محور تقارن داشته باشد، آن‌گاه دارای یک مرکز تقارن است که همه محورهای تقارن از آن می‌گذرد، با این توجه داریم:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ مختصات مرکز تقارن}$$

مختصات این نقطه در خط سوم باید صدق نماید. داریم:

$$\alpha \times 0 + 2 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 2$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ است.

$$(X, Y) = T_1(x, y) = (x + y, \frac{1}{2}y) \Rightarrow \begin{cases} X = x + y \\ Y = \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X - 2Y \\ y = 2Y \end{cases}$$

پس تبدیل یافته‌ی خط d بر اثر تبدیل T_1 خط d' با معادله‌ی زیر می‌باشد:

$$d' : 2Y = X - 2Y - 3 \Rightarrow d' : 4Y = X - 3$$

به طریق مشابه برای یافتن تبدیل یافته‌ی خط d' بر اثر تبدیل T_2 داریم:

$$(X, Y) = T_2(x, y) = (x - 2y, 2y) \Rightarrow \begin{cases} X = x - 2y \\ Y = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X + Y \\ y = \frac{1}{2}Y \end{cases} \Rightarrow d'' : 4 \times \frac{1}{2}Y = X + Y - 3 \Rightarrow Y = X - 3$$

که همان معادله خط d است.

به‌عنوان راه حل سریع‌تر و ساده‌تر با استفاده از ترکیب تبدیلات متوالی داریم:

$$T(x, y) = (T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2(T_1(x, y)) = T_2(x + y, \frac{1}{2}y) = (x + y - 2 \times \frac{1}{2}y, 2 \times \frac{1}{2}y) = (x, y)$$

که همان تبدیل همانی است، پس نتیجه‌ی اعمال تبدیل T (یعنی ترکیب دو تبدیل T_1 و T_2) بر روی هر شکل، همان شکل خواهد شد. دو تبدیل T_1 و T_2 ، وارون یکدیگر می‌باشد.

۱۶- گزینه ۴ پاسخ است.

می‌دانیم در خصوص دو خط متقاطع، دو نیمساز آن دو خط، محور تقارن بازتابی است که هر یک از آن دو خط بر اثر بازتاب نسبت به آن محور تقارن، بر روی دیگری تصویر خواهد شد. در حالت کلی نیز معادله‌ی نیمساز دو خط متقاطع به معادلات $d : ax + by + c = 0$ و $d' : a'x + b'y + c' = 0$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

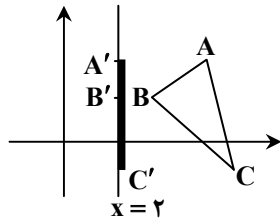
$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

با این توجه، معادله‌ی نیمساز بین این دو خط متقاطع برابر است با:

$$\frac{|x + y - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x - y + 2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = x - y + 2 \Rightarrow y = 2 \\ x + y - 2 = -(x - y + 2) \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ است.

بر اثر تبدیل $T(x, y) = (2, y - 2)$ تمام نقاط به نقطه‌ای بر روی خط $x = 2$ تصویر می‌شوند. مثلاً:



$$A(5, 3) \xrightarrow{T} A'(2, 1)$$

$$B(0, 5) \xrightarrow{T} B'(2, 3)$$

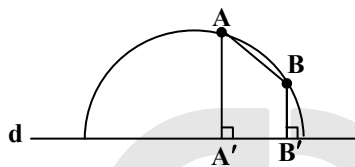
$$C(-1, -4) \xrightarrow{T} C'(2, -6) \dots$$

به این ترتیب مثلث $\triangle ABC$ نیز بر روی یک پاره‌خط که بخشی از خط $x = 2$ است، تصویر خواهد شد. مثلاً در شکل مقابل تصویر مثلث $\triangle ABC$ ، پاره‌خط $A'C'$ خواهد شد.

۱۸- گزینه ۲ پاسخ است.

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x, y)$ نسبت به خط $y = \beta$ نقطه‌ی $A'(x, 2\beta - y)$ است. با این توجه، قرینه‌ی نقطه‌ی $(3, -2)$ نسبت به خط $y = 2$ ، نقطه‌ی $(3, 6)$ خواهد بود لذا داریم: $n = 6$ و $m = 3$ در نتیجه $m - n = -3$ می‌باشد.

۱۹- گزینه ۲ پاسخ است.

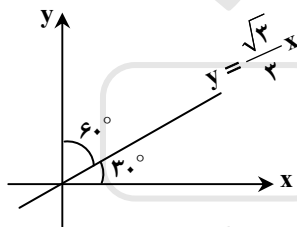


این نگاشت، تبدیل است زیرا متناظر با هر نقطه‌ی A ، یک تصویر بر روی خط d وجود دارد و بالعکس، متناظر با هر نقطه A' با اخراج عمودی بر خط d از نقطه‌ی A' ، تنها یک نقطه به‌عنوان نقطه‌ی A حاصل می‌شود. یعنی این ارتباط به‌صورت یک‌به‌یک می‌باشد. اما این تبدیل ایزومتري نمی‌باشد، زیرا واضح است در شکل مقابل $A'B'$ از AB کوچک‌تر است و برابر آن نمی‌باشد.

۲۰- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر زاویه‌ی دوران $2k\pi$ باشد (مضارب 360°) تصویر هر خط بر خودش منطبق می‌شود و لذا شیب خط حفظ شده است. اگر زاویه‌ی دوران $k\pi$ باشد (مضارب 180°) تصویر هر خط، خطی موازی آن خواهد بود و لذا در این حالت نیز شیب خط حفظ شده است. بنابراین کامل‌ترین پاسخ زاویه $k\pi$ است که $2k\pi$ را نیز دربر دارد.

۲۱- گزینه ۴ پاسخ است.



با رسم خط $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ مشخص است که زاویه‌ی خط با محور x ها

$$\text{Arctan} \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ \text{ است و لذا دوران یافته‌ی این خط حول مبدأ با زاویه‌ی } 60^\circ \text{ بر}$$

محور y ها منطبق خواهد شد.

۲۲- گزینه ۴ پاسخ است.

بازتاب نسبت به خط ایزومتري است ولی الزاماً شیب خط را حفظ نمی‌کند.

۲۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{cases} D: 2x - 3y = 4 \\ D': 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

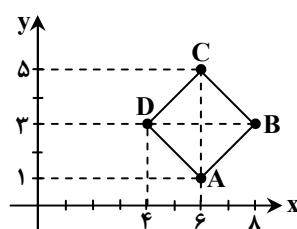
زاویه‌ی دوران 270° است، زیرا اگر ضابطه‌ی این دوران را بنویسیم و تصویر D را به‌دست آوریم همان D' خواهد بود:

$$D: 2x - 3y = 4, \quad T(x, y) = (y, -x)$$

$$\begin{cases} X = y \\ Y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -Y \\ y = X \end{cases} \Rightarrow D': -2Y - 3X = 4 \Rightarrow D': 3X + 2Y + 4 = 0$$

$$T(-1, -2) = (-2, 1)$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ است.



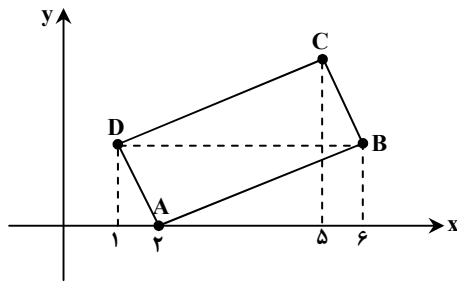
$ABCD$ مطابق شکل یک مربع است با اندازه‌ی ضلع $AB = 2\sqrt{2}$

$$S_{ABCD} = AB^2 = 8$$

در تجانس با نسبت k مساحت هر شکل k^2 برابر می‌شود، پس مساحت شکل تصویر در اثر دو تجانس یکی با $k_1 = \sqrt{2}$ و دیگری با $k_2 = 3$ برابر است با:

$$S' = (\sqrt{2})^2 (3)^2 \times 8 = 144$$

۲۵- گزینه ۳ پاسخ است.



شکل فرض یک مستطیل است. برای امتحان این امر کافی است، ضرب داخلی دو بردار $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$ را بیابیم که صفر است:

$$\overline{AB}(4,2) \quad , \quad \overline{AD}(-1,2) \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$$

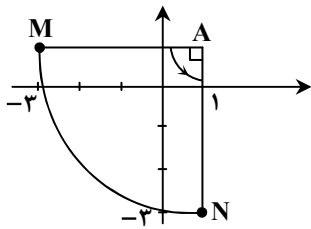
بنابراین مساحت مستطیل ABCD برابر است با:

$$S_{ABCD} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| = \sqrt{20} \times \sqrt{5} = 10$$

ضابطه‌ی $T_1(x, y) = (x, -y)$ تقارن نسبت به محور x هاست که مساحت‌ها را تغییر نمی‌دهد و $T_2(x, y) = (2x, 2y)$ ضابطه‌ی تجانس با $k = 2$ است که

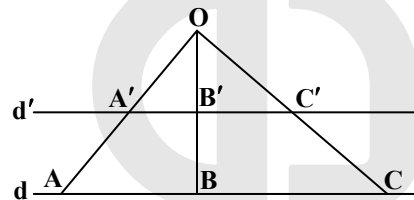
$$S' = 4 \times S = 4 \times 10 = 40 \quad k^2 \text{ برابر می‌کند:}$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ است.



پیدا کردن مختصات دوران یافته یک نقطه حول یک نقطه دلخواه (به جز مبدأ) در حالت کلی کمی مشکل است و نیاز به انتقال محورها و سپس بازگشت به محوره‌های قبلی دارد. اما در این سؤال با دقت در شکل سؤال با توجه به آن که AM افقی است، لذا اگر دوران یافته‌ی نقطه‌ی M را نقطه‌ی N بنامیم، AN خطی عمود خواهد بود که با توجه به برابری $AM = AN$ مختصات نقطه‌ی N، $(1, -3)$ خواهد بود.

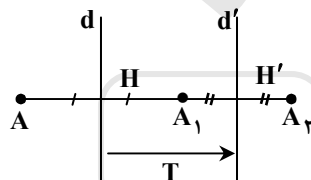
۲۷- گزینه ۴ پاسخ است.



هر نقطه در صفحه را می‌توان به عنوان مرکز تجانس برای دو خط موازی در نظر گرفت.

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \dots = k$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ است.



چون $AH = A_1H$ و $A_1H' = A_2H'$ پس $\overline{AA_2} = 2\overline{T}$ و چون راستا و فاصله‌ی دو خط ثابت است، بردار T بردار ثابتی است، لذا می‌توان با انتقالی با برداری به طول ۴، A را به A_2 نگاشت.

۲۹- گزینه ۴ پاسخ است.

ضابطه‌ی دوران به مرکز مبدأ و زاویه‌ی 90° به صورت $T(x, y) = (-y, x)$ است. داریم:

$$(X, Y) = T(x, y) = (-y, x) \Rightarrow \begin{cases} X = -y \\ Y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = Y \\ y = -X \end{cases}$$

$$-X = 4Y - a \xrightarrow{(0,2)} 0 = 8 - a \Rightarrow a = 8$$

۳۰- گزینه ۳ پاسخ است.

از آنجایی که دوران یافته‌ی نقطه‌ی A، نقطه‌ی B و دوران یافته‌ی نقطه‌ی B، نقطه‌ی C شده است، لذا مرکز دوران، محل تلاقی عمود منصف‌های AB و BC یعنی همان نقطه‌ی G می‌باشد. از طرف دیگر می‌دانیم زاویه دوران برابر است با زاویه‌ی خط و تصویرش که در این‌جا برابر 120° می‌باشد.